

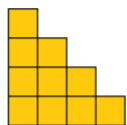
Liczby trójkątne

1. Liczby trójkątne:

Sumę n początkowych liczb naturalnych oznaczmy przez T_n :

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Liczbę T_n nazywać będziemy n -tą liczbą trójkątną. Nazwę można uzasadnić przedstawieniem geometrycznym:



$$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

2. Wzór ogólny:

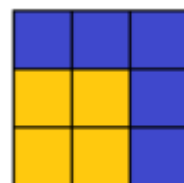
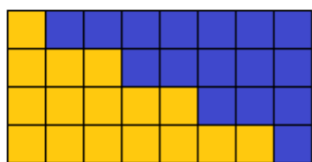


$$2T_n$$

3. Obliczmy:

- $1 + 2 + 3 + \dots + 100 =$
- $1 + 2 + 3 + \dots + n =$
- $111 + 112 + 113 + \dots + 999 =$
- $2 + 4 + 6 + \dots + 100 =$
- $2 + 4 + 6 + \dots + 2n =$
- $1 + 3 + 5 + \dots + 2015 =$
- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) =$

4. Uzasadnienia geometryczne ostatniego wzoru:



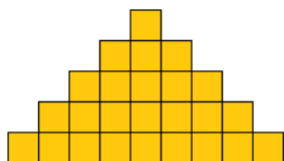
lub

A teraz przez liczby trójkątne:

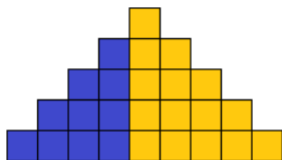
Układamy liczby nieparzyste jedna nad drugą:

a teraz je przestawiamy

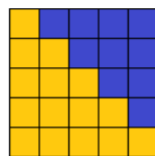
i mamy:



$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$$



$$T_{n-1} + T_n$$



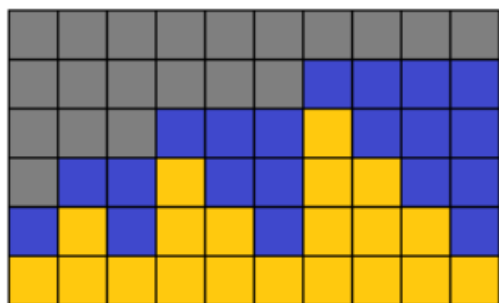
$$T_{n-1} + T_n = n^2$$

5. Ile prostokątów można doliczyć się na szachownicy 8×8 ?

6. Ile różnych równoległoboków wyznacza k prostych równoległych przeciętych przez m innych prostych równoległych?

7. Sumy kolejnych liczb trójkątnych:

Aby wyznaczyć wzór na sumę $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$ ustawmy kolejne liczby trójkątne koło siebie, ich drugi egzemplarz dajmy od góry i uzupełnijmy to wszystko do prostokąta:



$$S_n + S_n + \text{■}$$

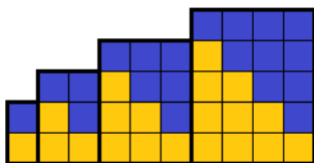
A teraz zauważmy, że kolejne poziome szare paski są kolejnymi liczbami trójkątnymi, więc szary obszar też jest sumą $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$.

Mamy więc wzór $3S_n = T_n \cdot (n + 2) = (1 + 2 + \dots + n) \cdot (n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

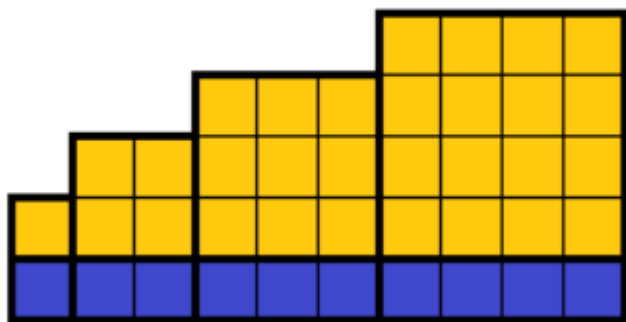
Stąd $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

8. Sumy kwadratów kolejnych liczb naturalnych:

Aby wyznaczyć wzór na sumę $K_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ ustawmy kolejne liczby trójkątne koło siebie, ich drugi egzemplarz dajmy od góry:



Widzimy, że na rysunku są dwie sumy $2S_n = 2(T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n)$
Ale:



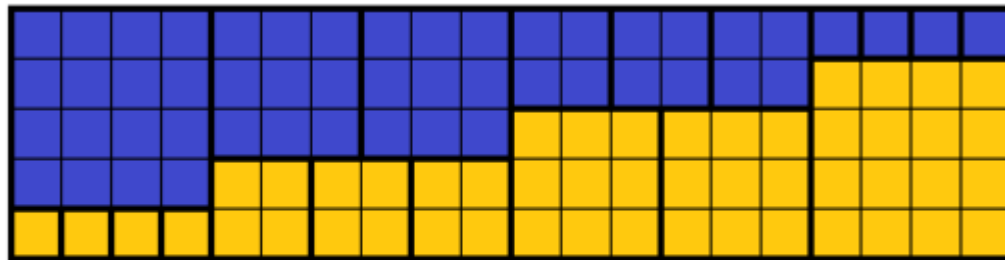
jest to również $K_n + T_n$
czyli

$$K_n = 2S_n - T_n = 2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2(n+2) - 3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

9. Spróbujmy znaleźć wzór na sumę kolejnych kwadratów:

$$K_1 + K_2 + \dots + K_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

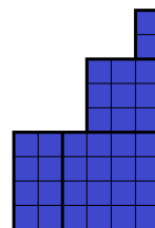
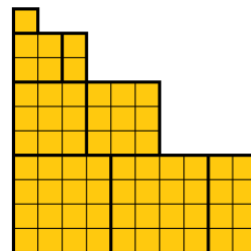
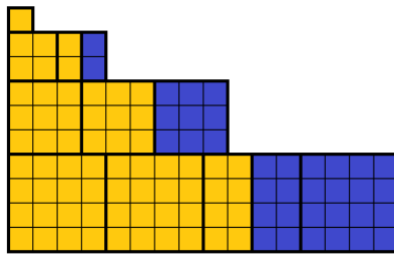
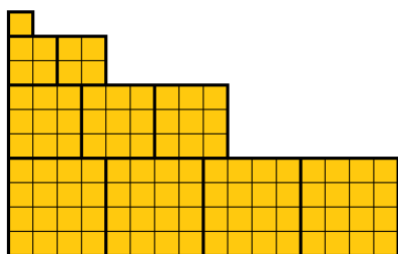
$$K_1 + K_2 + \dots + K_n = \frac{(n+1)S_n}{2}$$



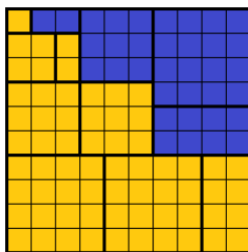
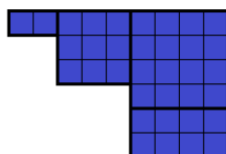
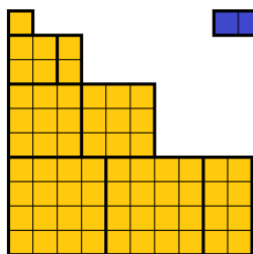
$$2 \cdot (K_1 + K_2 + \dots + K_n)$$

10. **Suma sześciątów:**

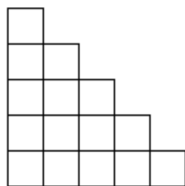
$$k^3 = k \cdot k^2 \quad \text{oraz} \quad k^2 = T_{n-1} + T_n$$



A z otrzymanych części można ułożyć kwadrat o boku T_n :



11. **Ile prostokątów jest na rysunku:**



$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 70$$

Ogólniej:

na rysunku liczby T_n jest dokładnie $S_1 + S_2 + \dots + S_n = \binom{n+3}{4}$

