Propozycje tematów na XXXVII Ogólnopolski Sejmik Matematyków

Temat: Model regresji liniowej

Bardzo często w analizie statystycznej pojawia się przypuszczenie istnienia zależności liniowej między dwiema cechami (przykładowo może nas interesować zależność między wydajnością pracy a stażem pracy). W tym celu musielibyśmy w sposób niezależny wybrać pewną liczbą pracowników danego przedsiębiorstwa i zdobyć odpowiednie dane. Po stworzeniu dla nich wykresu rozrzutu (rozproszenia) można znaleźć funkcję liniową $y = ax+b$, która „najlepiej" opisuje uzyskaną zależność. Wykorzystuje się tutaj metodę najmniejszych kwadratów. Po oszacowaniu parametrów tej liniowej funkcji regresji można ocenić dokładność dopasowania funkcji regresji do danych empirycznych. Analizę można poszerzyć o zbadanie istotności parametrów strukturalnych. Oprócz matematycznego (z wykorzystaniem metod statystyki matematycznej) opisu pracę warto uzupełnić przykładem takiej analizy na podstawie konkretnych danych z wybranej przez siebie dziedziny (finanse, medycyna, sport itp.).

Literatura:

1. Mieczysław Sobczyk „Statystyka", PWN, Warszawa 2007.
2. Mariola Piłatowska „Repetytorium ze statystyki", PWN, Warszawa 2007.

Temat: Systemy wyborcze

Regularnie w krajach demokratycznych odbywają się wybory: na prezydenta, czy do parlamentu. Wyróżnia się trzy systemy wyborcze: większościowy, proporcjonalny i mieszany. Każdy z nich ma swoje cechy i w różnych sytuacjach okazują się lepszy. Z matematycznego punktu widzenia najciekawszy chyba jest system proporcjonalny. W pracy można np. opisać różne sposoby dzielenia mandatów w tym systemie, i zobaczyć jak działałyby na konkretnym przykładzie.

Ciekawym zagadnieniem może być też problem dzielenia obszaru na okręgi wyborcze: zarówno w przypadku systemu większościowego, jak i proporcjonalnego.

Literatura:

1. https://www.senat.gov.pl/gfx/senat/pl/senatopracowania/90/plik/ot-578-2.pdf
2. Kodeks wyborczy.
3. Różne źródłą internetowe.

Temat: Analiza matematyczna w zadaniach konkursowych

Podczas przygotowań do różnorakich konkursów matematycznych rozwiązujemy zadania różnego typu, np. z teorii liczb, szukamy rozwiązań równań w zbiorze liczb rzeczywistych lub zespolonych, rozwiązujemy równania funkcyjne, albo problemy geometryczne oraz kombinatoryczne. Jednak czasami do rozwiązania przydają się metody znane z analizy matematycznej: możemy obliczyć granicę jakiegoś ciągu, czy funkcji, znaleźć ekstremum funkcji.

Praca mogłaby zawierać zadania z konkursów matematycznych (np. olimpiady matematycznej), w których można zastosować wspomniane wcześniej metody razem z rozwiązaniami.

Literatura:

1. Coroczne sprawozdania z zawodów Olimpiady Matematycznej.
2. https://om.mimuw.edu.pl/
3. Henryk Pawłowski, *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*, Turpress, Toruń 1994
4. Zasoby magazynu Delta.

Temat: Metody numeryczne

Co to są metody numeryczne? Można krótko powiedzieć, że ten dział matematyki zajmuje się przybliżonym rozwiązywaniem zadań matematycznych. Zakres tych zagadnień jest bardzo rozległy. Nie sposób jest opisać wszystkie te zagadnienia. Uczestnik Sejmiku może skupić się na jednym spośród wymienionych:

- jak obliczać wartość wielomianu i jego pochodnych w zadanym punkcie?
- znaleźć wielomian, który w zadanych punktach przyjmuje podane wartości, a może i pochodne w tych punktach zadane (interpolacja);
- przybliżyć funkcję f inną funkcją q należącą do pewnej klasy funkcji tak, aby jakość przybliżenia była najlepsza w sensie różnych miar odległości (aproksymacja);
- w przybliżony sposób obliczyć wartość całki oznaczonej (wzory kwadratur);
- znaleźć rozwiązania równania $f(x) = 0$ dla zadanej funkcji f;
- rozwiązać układ równań liniowych.

Do opisu zagadnienia można dodać samodzielnie napisaną aplikację, dotyczącą omawianego zagadnienia.

Literatura:

1. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, “Metody numeryczne”, PWN 2015
2. J.M. Jankowscy, “Przegląd metod i algorytmów numerycznych”, WNT 1988
3. J. Klamka i in., “Metody numeryczne”, Wyd. Politechniki Śl. 2015
4. Internet

Temat: Dyskretne łańcuchy Markowa oraz ich zastosowania

Znakomita część procesów losowych występujących w przyrodzie (np. badanych w ramach fizyki, biologii, genetyki lub dynamiki populacyjnej) daje się opisać matematycznie (w języku probabilistyki) za pomocą tzw. *łańcuchów Markowa*. W najprostszym ujęciu, łańcuch Markowa jest *ciągiem zmiennych* losowych $X_1, X_2, \ldots,$ przyjmujących wartości (nazywane stanami) w zbiorze skończonym, w którym prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $X_{n+1} = j$ zależy jedynie od wartości zmiennej X_n (a nie zależy od zmiennych $X_0, \ldots, X_n$. Łańcuchy tego typu mogą zatem służyć do opisu procesów których stany przyjmowane w przyszłości zależą jedynie od teraźniejszości, a są niezależne od przeszłości.

Najczęściej bada się *łańcuchy jednorodne w czasie*, czyli takie w których prawdopodobieństwo przejścia od stanu i do stanu j zależy jedynie od liczby kroków (jednostek czasu) dzielących te stany, a jest niezależne od momentu w którym to przejście to następuje. Symbolicznie, *właśność Markowa* dla ciągu zmiennych losowych $\{X_n\}_{n \in N}$ można zatem wyrazić następująco:

$$P\left(X_{n+1} = j \middle| X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i = P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i = p_{ij}\right.\right.$$

Prawdopodobieństwa $p_{ij} \in [0,1]$ (niezależne od n tworzą macierz kwadratową (stopnia odpowiadającego ilości potencjalnych stanów łańcucha), oznaczaną zwykle symbolem P, w której sumy współczynników w każdym wierszu wynoszą 1. Macierz taką nazywamy *macierzą przejścia* dla łańcucha $\{X_n\}_{n \in N}$. Macierz $P = [p_{ij}]$, wraz z *rozkładem początkowym*, czyli wektorem $p = [p_i]$ o współrzędnych $p_i = P(X_0 = i)$, stanowią pełny i jednoznaczny opis danego łańcucha Markowa i jego własności; np. wektor rozkładów łańcucha w chwili n moża wyrazić jako iloczyn macierzowy wektora p i n-tej potęgi macierzy P. Najistotniejszym zagadnieniem w badaniu łańcuchów Markowa jest rozstrzygnięcie istnienienia tzw. *rozkładu stacjonarnego*, czyli wektora $p^{\square}$ spełniającego $p^{\square} P = p^{\square}$, oraz kwestia asymptotyki rozkładów, w której pożądana jest zbieżność $p P^n \to p^{\square}$ (gdy $n \to \infty$, niezależnie od wyboru rozkładu początkowego p. Praca uczestnika Sejmików może skupiać się na omówieniu następujących zagadnień:

1. Podstawowa klasyfikacja stanów łańcucha Markowa (stany istotne, okresowe i pochłaniające, klasy zamknięte) oraz pojęcia nieprzywiedlności i okresowości łańcucha.
2. Graficzna reprezentacja łańcuchów Markowa.
3. Stany powracające i chwilowe, ich charakterystyka oraz związek ze stanami istotnymi. Powracalność i chwilowość łańcucha.
4. Pojęcie rozkładu stacjonarnego łańcucha Markowa.
5. Twierdzenie ergodyczne dla łańcuchów Markowa (o istnieniu rozkładu stacjonarnego i zbieżności rozkładów łańcucha).
6. Analiza wybranych przykłady łańcuchów Markowa (jak np. błądzenia losowe po prostej z barierami elastycznymi, model Bernoulliego – Laplace'a dyfuzji cieczy, model Ehrenfestów, model wypadków przemysłowych, Model Greenwoda rozwoju epidemii) pod kątem istnienia rozkladów stacjonarnych i asymptotyki rozkładów.

Literatura:

1. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1, 3td ed., John & Wiley Sons New York, 1968.
2. M. Iosifescu, *Finite Markov Processes and Their Applications*, Dover Publications, New York, 2007.
3. J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa, 2001.
4. G. Grimmett, D. Stirzaker, Probability and Random Processes, 3td ed., Oxford University, New York, 2001.

Temat:Twierdzenie Nasha

Znajdywanie rozwiązania w grach prowadzi w szczególności do poszukiwania ekwilibriów, czyli punktów równowagi. Twierdzenie Nasha mówi, że w grach o skończonych zbiorach graczy i srategii zawsze znajdziemy punkt równowagi, niekoniecznie w strategiach

czystych. W dowodzie tego twierdzenia ma zastosowanie inne znane twierdzenie, mianowicie twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. Szczególnym przypadkiem twierdzenia Nasha, jest tzw. twierdzenie o minimaksie dla gier o sumie zerowej.

Literatura:

1. Władysław Kulpa ,Topologia a ekonomia, PWN
2. D. Straffin,Teoria gier, Philip, SCHOLAR

Temat: Nieporządne funkcje

Funkcje, o których uczymy się w szkole, są bardzo porządne - z reguły ciągłe, różniczkowalne. Pojawia się wprawdzie funkcja: x 7→ |x|, mająca jeden punkt, w którym nie ma pochodnej, ale czy potrafisz sobie wyobrazić funkcję, która składa się z samych takich „szpiców", tzn. która jest ciągła, ale nigdzie nie ma pochodnej. A tymczasem jest wiele (znacznie więcej niż tych „porządnych") funkcji, które albo nie są ciągłe w żadnym punkcie, albo mają przeliczalnie wiele punktów ciągłości, albo są wszędzie ciągłe, ale nigdzie nieróżniczkowalne. Takie trudno wyobrażalne i niemożliwe do dokładnego narysowania funkcje mogą być tematem tej pracy. Najbardziej znane to funkcja Takhagi, Dirichleta, Weierstrassa, Van der Waerdena, Riemanna. Autor pracy na ten temat może omówić (i precyzyjnie uzasadnić) ich własności, może podać własne przykłady ciekawych funkcji. A może zainteresuje Cię inny problem: Funkcja zdefiniowana na odcinku, która ma (wszędzie) pochodną równą zeru, to funkcja stała. A czy wiesz, że istnieje funkcja ciągła i rosnąca, która jest prawie wszędzie różniczkowalna i której pochodna tam, gdzie istnieje, jest równa zeru? Ba, nawet istnieje funkcja ciągła, ściśle rosnąca, określona na odcinku, która ma pochodną prawie wszędzie równą zeru. Takie i inne przykłady nietypowych (czyżby?) funkcji znaleźć można m.in. w podanych książkach. A może wymyślisz własne przykłady funkcji o zaskakujących własnościach?

Literatura:

1. K. Ciesielski, Z. Pogoda, Diamenty matematyki, Prószyński i S-ka.
2. B.R. Gelbaum, J.M.H. Olmsted, Theorems and Counterexamples in Mathematics, Problem Books in Mathematics, Springer Verlag.
3. A. Kharazishvili, Strange functions in real analysis, CRC Press.

Temat: Szeregi Fouriera

Definicja, własności i zastosowania. Wzory Eulera-Fouriera. Warunek Dirichleta. Twierdzenie dotyczące rozwijalności funkcji w szereg Fouriera. Rozwijanie przykładowych funkcji w szereg Fouriera. Obliczanie sum szeregów liczbowych.

Literatura:

1. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza Matematyczna w zadaniach, część II, Warszawa, PWN, 2000.
2. M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2 - Definicje, Twierdzenia, Wzory, Wrocław, Oficyna Wydawnictwa GIS, 2005,

Temat: Przekształcenia geometryczne

Definicja przekształcenia zbioru punktów. Przekształcenia płaszczyzny: przesunięcie, symetria względem osi x, obrót dokoła punktu, jednokładność. Powinowactwa i podobieństwa. Izometrie. Inwersja. Własności przekształceń oraz związki pomiędzy nimi.

Literatura:

1. Franciszek Leja, Geometria analityczna, Warszawa, PWN 1977.

Tytuł : Tajemnice rzutu monetą

Czy rzucając monetą niesymetryczną można uzyskać sprawiedliwe wyniki (tj. o prawdopodobieństwie ½)? A może można uzyskać dowolne prawdopodobieństwo? Czy da się rozpoznać, że dany ciąg wyników rzutu monetą jest prawdziwy, tj. nie został sztucznie wymyślony? Czy wyniki „RRO" i „ORR" są jednakowo prawdopodobne? A jeśli nie, to dlaczego?

Literatura:

1. J. Jakubowski, R. Sztencel, Rzuć monetą…, na portalu http://www.deltami.edu.pl/
2. Ł. Rajkowski, RROzważania O RReszce i ORRle, na portalu http://www.deltami.edu.pl/
3. A. Płocki, Graf stochastyczny jako środek matematyzacji i rozumowania, Szkoła Matematyki Poglądowej, https://smp.uph.edu.pl/msn/5/27-37.pdf
4. P. Billingsley, Prawdopodobieństwo i miara, PWN, Warszawa, 1987
5. W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa, 1977

Uwagi: na podstawie [3] można rozwinąć wiele innych, pokrewnych tematów z probabilistyki

Tytuł: Błądzenie losowe na grafach

Błądzenie jest w naszym świecie częstym zjawiskiem. Przykłady błądzenia mamy na co dzień: zgubiliśmy się, szukamy pozostawionych gdzieś rzeczy, szukamy informacji w Internecie lub po prostu idziemy na spacer bez specjalnego celu. W takich sytuacjach można zadać pytania:

- Gdzie dojdziemy idąc na oślep?
- Jak szybko coś znajdziemy lub gdzieś dojdziemy?
- W jakich miejscach najczęściej będziemy chodzić?
- Czy uda się obejść wszystkie miejsca?

Literatura:

1. M. Szykuła, Błądzenie losowe, na portalu http://informatyka.wroc.pl
2. P. Billingsley, Prawdopodobieństwo i miara, PWN, Warszawa, 1987
3. W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa, 1977

Temat: Hipoteza Poincarego.

Światowe media obiegła w 2006 roku lotem błyskawicy wiadomość o rosyjskim geniuszu, który dobrowolnie zrezygnował z przyznanej mu nagrody miliona dolarów za rozwiązanie stuletniego problemu w matematyce. Geniuszem, o którym mowa, jest prof. Grigori Perelman, a słynnym problemem -- hipoteza Poincare'go z 1904 roku. O ile większość gazet dość drobiazgowo rozpisywała się o ekscentryczności rosyjskiego matematyka, o tyle mało kto pokusił się o wyjaśnienie, na czym właściwie polega hipoteza Poincare'go w swoim najprostszym sformułowaniu, jakkolwiek potrzebny do zrozumienia aparat pojęciowy wcale nie jest zaawansowany i nie powinien przysporzyć trudności osobie interesującej się matematyką, która dysponuje tylko standardowym wykształceniem ze szkoły średniej. Przykładowa praca mogłaby zająć się przybliżeniem czytelnikowi dysponującemu tylko szkolną wiedzą matematyczną znaczenia hipotezy Poincare'go. Jakkolwiek wiążące się z opisywanym problemem zagadnienie klasyfikacji rozmaitości w wymiarach wyższych od 3 jest skomplikowane pojęciowo, o tyle klasyfikacja powierzchni domkniętych w wymiarze 2 jest stosunkowo prosta i często pojawia się jako ilustracja w podręcznikach topologii algebraicznej.

Literatura:

1. P. Strzelecki, Hipoteza Poincarego, Delta, 1/2004.
2. R. Duda, Trzeci problem milenijny: hipoteza Poincarego, Wiadomości Matematyczne 38 (2002), 63-90.
3. D. O'Shea, he Poincare Conjecture: In Search of the Shape of the Universe, Walker & Company, 2007.

Temat: Różne dowody jednej tożsamości.

W artykule "Pięć dowodów jednej tożsamości "Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie" Numer 47, Lipiec 2011Wojciech Guzicki przedstawia różne dowody tożsamości kombinatorycznej:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

Pokazuje podejście analityczne, algebraiczne, kombinatoryczne, a także dowody algorytmiczne- Algorytm Siostry Celine, Algorytm Gospera, metodę funkcji tworzących. Celem pracy na Sejmik jest objaśnienie tych metod oraz rozwiązanie za ich pomocą ciekawych zadań (zadania podane są też w cytowanym artykule).

Literatura:

1. http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/47/guzicki.pdf

Temat: Pierwsze modele populacyjne

Pojęcie i istota modelu matematycznego. Najstarsze modele ekologiczne i populacyjne. Ciąg Fibonacciego i jego zastosowania. Przegląd metod matematycznych stosowanych w różnych modelach: np. w procesie urodzin i śmierci, modelu drapieżnik-ofiara, itp.

Literatura:

1. Urszula Foryś, Matematyka w biologii, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
2. Delta - miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny szczególnie polecamy artykuły:

   W. Kunicki-Goldfinger, O roli intuicji i teorii w rozwoju biologii, Delta 8 (80), 1980.
   L. Kuźnicki, Zasada nieciągłości w ewolucji, Delta 8 (116), 1983.
   W. Kunicki-Goldfinger, Redukcjonizm w biologii, Delta 9 (117), 1983.
   E. Skrzypczak, Rysie, króliki, wojownicze koty, czyli o modelowaniu matematycznym procesów niefizycznych, Delta 11 (23), 1975.
3. Stanisław Kowal, Przez rozrywkę do wiedzy. Rozmaitości matematyczne, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1986.

Temat: Bałagan kontra porządek

Relacje to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów. Relacje posiadające określone własności dzielimy na klasy. Najbardziej znane, to relacje zwrotne, symetryczne, antysymetryczne czy przechodnie. Są relacje, które porządkują zbiory, są takie które dzielą go na podzbiory elementów nierozróżnialnych. Opisz te relacje działania, które można na nich wykonać oraz znajdź ich ciekawe przykłady.

Literatura:

1. H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, PWN, Warszawa, 1990.
2. Z. Moszner, O teorii relacji, WSiP, Warszawa, 1974.
3. J. Cichoń, Wykłady ze wstępu do matematyki, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne,Wrocław, 2003.
4. J.A. Szrejder, Równość, podobieństwo, porządek, WNT, Warszawa, 1975