LISTA TEMATÓW

OGÓLNOPOLSKI SEJMIK MATEMATYKÓW 2019

1. Racjonalne podejmowanie decyzji

W książce "Games, Strategies, and Decision Making" J.E. Harington zamieszcza następujące tekst: ,,Jednym z krytycznych momentów na początku trylogii Władca Pierścieni jest spotkanie w Rivendell, podczas którego miano zadecydować kto powinien zabrać pierścień do Mordoru. Krasnolud Gimli nie chce słyszeć o powierzeniu tego zadania Elfowi, podczas gdy Legolas (który jest elfem) myśli podobnie o Gimlim. Boromir (człowiek) jest przeciwny temu, żeby którykolwiek z nich zajął się pierścieniem. Jest jeszcze hobbit Frodo, którego chęć trzymania w swojej pieczy pierścienia jest najsłabsza, ale wie, że ktoś jednak musi wrzucić pierścień w ogień Mordoru. W tworzeniu modelu gry dla tej sytuacji zakładamy, że jest czterech graczy: Boromir, Frodo, Gimli oraz Legolas. (Bohaterów tego wydarzenia było oczywiście więcej, m.in Aragorn i Elrond, ale dla uproszczenia gry zostańmy przy czterech graczach.) Każdy z graczy ma listę preferencji co to tego, kto powinien zanieść pierścień do Mordoru. Każdy poza Frodem uważa, że sam powinien wziąć na siebie to zadanie. Każdy z nich też uważa, że Frodo jest lepszym kandydatem niż ktokolwiek inny, i nikt inny nie powinien dotykać pierścienia. Froda zaś nie chce podejmować się tego zadania, woli, żeby ktokolwiek inny zabrał pierścień, zrobiłby to jednak, gdyby nikt inny się tego nie mógł podjać. Rozważamy grę, w której wszyscy równocześnie podejmują decyzję. Tylko wtedy, gdy wszyscy będą jednomyślni, to zadanie zostanie powierzone wybranej osobie, w przeciwnym wypadku nikt nie podejmuje się zadania. Znajdź punkt równowagi Nasha."

Czym jest punkt równowagi Nasha? Jak go wyznaczyć? Jak należy podejmować decyzję, gdy wiemy, że nasz przeciwnik jest racjonalny? Czy wybieranie strategii z punktem równowagi Nasha jest zawsze słuszne? Co robić, gdy taki punkt nie istnieje?

Literatura:

1. J.E. Harington, "Games, Strategies, and Decision Making"
2. P.D.Straffin, "Teoria gier",
3. W. Kulpa Topologia a ekonomia,, PWN

2. Kraty

Kratą (ang. lattices) w sensie porządkowym nazywamy każdy zbiór uporządkowany L, dla którego spełniony jest warunek, że dla każdej pary x,y elementów zbioru L istnieje kres górny sup(x,y) i kres dolny inf(x,y). Można nietrudno udowodnić, że w kracie każdy skończony i niepusty podzbiór ma kres górny i kres dolny. Własność ta prowadzi do pojęcia zupełności kraty: kratę L nazywamy zupełną, gdy każdy jej niepusty podzbiór ma kres górny i dolny. Oczywiście krata zupełna musi posiadać element największy i najmniejszy. Ograniczając rozważania do kraty dystrybutywnych otrzymujemy twierdzenie mówiące, że każda krata rozdzielna jest izomorficzna z pewną podkratą kraty zbioru potęgowego P(X) dla pewnego zbioru X.

Literatura:

1. A. Walendziak, Podstawy algebry ogólnej i teorii krat,, PWN
2. A. Błaszczyk, S.Turek,Teoria mnogości, PWN
3. G. Birkhoff, Lattice theory, 3 ed. AMS Coll. Publ. 25, Providence, (1967)

3. Matematyka numerów kont, kart kredytowych numeru PESEL.

Obecnie jesteśmy ciągle zalewani różnego rodzaju numerami: telefonów, numerów kart lojalnościowych, loginami do przeróżnych kont. Niektóre z nich są jednak ważne z powodu ich istotności. Są to np. numer PESEL, numer konta bankowego, numer karty kredytowej, czy debetowej. Częścią każdego z nich jest ca najmniej jedna cyfra kontrolna (lub suma kontrolna). W jaki sposób są one wyliczane? Czy dzięki nim na pewno każdy błąd w podawaniu numeru zostanie wychwycony?

Literatura:

internet

4. Fizyka matematyczna / matematyka fizyczna.

Do opisu wielu zjawisk w otaczającym nas świecie potrzebujemy matematyki. Fizyka, żeby poradzić sobie z wieloma problemami korzysta z pomocy matematyki. Np. prędkość to pochodna, energia to całka, a do opisu wahadła wykorzystujemy równania różniczkowe. Celem pracy mógłby być związek matematyki i fizyki, ich współzależności.
Literatura :

1. S. Banach, Mechanika, 1938
2. R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, Feynmana wykłady z fizyki, PWN

5. Model regresji liniowej

Bardzo często w analizie statystycznej pojawia się przypuszczenie istnienia zależności liniowej między dwiema cechami (przykładowo może nas interesować zależność między wydajnością pracy a stażem pracy). W tym celu musielibyśmy w sposób niezależny wybrać pewną liczbą pracowników danego przedsiębiorstwa i zdobyć odpowiednie dane. Po stworzeniu dla nich wykresu rozrzutu (rozproszenia) można znaleźć funkcję liniową y = ax+b, która „najlepiej" opisuje uzyskaną zależność. Wykorzystuje się tutaj metodę najmniejszych kwadratów. Po oszacowaniu parametrów tej liniowej funkcji regresji można ocenić dokładność dopasowania funkcji regresji do danych empirycznych. Analizę można poszerzyć o zbadanie istotności parametrów strukturalnych. Oprócz matematycznego (z wykorzystaniem metod statystyki matematycznej) opisu pracę warto uzupełnić przykładem takiej analizy na podstawie konkretnych danych z wybranej przez siebie dziedziny (finanse, medycyna, sport itp.).

Literatura:

1. M.Sobczyk „Statystyka”, PWN, Warszawa 2007,
2. M.Piłatowska „Repetytorium ze statystyki”, PWN, Warszawa 2007.

6. Szeregi Fouriera

Definicja, własności i zastosowania. Wzory Eulera-Fouriera. Warunek Dirichleta. Twierdzenie dotyczące rozwijalności funkcji w szereg Fouriera. Rozwijanie przykładowych funkcji w szereg Fouriera. Obliczanie sum szeregów liczbowych.

Literatura:

1. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza Matematyczna w zadaniach, część II, Warszawa, PWN, 2000.
2. M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2 - Definicje, Twierdzenia, Wzory, Wrocław, Oficyna Wydawnictwa GIS, 2005,

7. Przybliżone metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

Tylko niewielka klasa równań różniczkowych zwyczajnych może być rozwiązana metodami analitycznymi. Dlatego istotnym zagadnieniem jest znajdowanie dobrych przybliżeń numerycznych danego rozwiązania. Pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego, problem Cauchy'ego, metoda Eulera i jej modyfikacje (m. in. ulepszona metoda Eulera, metoda Eulera-Cauchy'ego), metoda Rungego-Kutty i inne.

Literatura:

1. J. Ombach,Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo-Maple, Kraków,Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, 1999.
2. A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, Warszawa, PWN, 1971.

8. Nieporządne funkcje

Funkcje, o których uczymy się w szkole, są bardzo porządne - z reguły ciągłe, różniczkowalne. Pojawia się wprawdzie funkcja: x 7→ |x|, mająca jeden punkt, w którym nie ma pochodnej, ale czy potrafisz sobie wyobrazić funkcję, która składa się z samych takich „szpiców”, tzn. która jest ciągła, ale nigdzie nie ma pochodnej.
A tymczasem jest wiele (znacznie więcej niż tych „porządnych”) funkcji, które albo nie są ciągłe w żadnym punkcie, albo mają przeliczalnie wiele punktów ciągłości, albo są wszędzie ciągłe, ale nigdzie nieróżniczkowalne.
Takie trudno wyobrażalne i niemożliwe do dokładnego narysowania funkcje mogą być tematem tej pracy. Najbardziej znane to funkcja Takhagi, Dirichleta, Weierstrassa, Van

der Waerdena, Riemanna.
Autor pracy na ten temat może omówić (i precyzyjnie uzasadnić) ich własności, może podać własne przykłady ciekawych funkcji.
A może zainteresuje Cię inny problem: Funkcja zdefiniowana na odcinku, która ma (wszędzie) pochodną równą zeru, to funkcja stała. A czy wiesz, że istnieje funkcja ciągła i rosnąca, która jest prawie wszędzie różniczkowalna i której pochodna tam, gdzie istnieje, jest równa zeru? Ba, nawet istnieje funkcja ciągła, ściśle rosnąca, określona na odcinku, która ma pochodną prawie wszędzie równą zeru. Takie i inne przykłady nietypowych (czyżby?) funkcji znaleźć można m.in. w podanych książkach.
A może wymyślisz własne przykłady funkcji o zaskakujących własnościach?

Literatura:

1. K. Ciesielski, Z. Pogoda, Diamenty matematyki, Prószyński i S-ka.
2. B.R. Gelbaum, J.M.H. Olmsted, Theorems and Counterexamples in Mathematics, Problem Books in Mathematics, Springer Verlag.
3. A. Kharazishvili, Strange functions in real analysis, CRC Press.

9. Rozmieszczanie przedmiotów w pudełkach

Na ile sposobów można rozmieścić przedmioty w pudełkach jeśli możliwe są różne sytuacje: przedmioty są rozróżnialne lub nie oraz pudełka są rozróżnialne lub nie. Dodatkowo możemy postawić różne założenia o zawartości pudełek - mogą zawierać dowolną ilość przedmiotów lub co najwyżej jeden przedmiot. Przedstaw rozwiązania przedstawionych sytuacji wraz z opisem obiektów kombinatorycznych otrzymanych w wyniku rozwiązań.

Literatura:

1. Zbigniew Palka, Andrzej Ruciński, Wykłady z kombinatoryki, WNT, 2004.
2. Victor Bryant, Aspekty kombinatoryki, WNT, 2007

10. Metody numeryczne

Co to są metody numeryczne? Można krótko powiedzieć, że ten dział matematyki zajmuje się przybliżonym rozwiązywaniem zadań matematycznych. Zakres tych zagadnień jest bardzo rozległy. Nie sposób jest opisać wszystkie te zagadnienia. Uczestnik Sejmiku może skupić się na jednym spośród wymienionych:
- jak obliczać wartość wielomianu i jego pochodnych w zadanym punkcie?
- znaleźć wielomian, który w zadanych punktach przyjmuje podane wartości, a może i pochodne w tych punktach zadane (interpolacja);
- przybliżyć funkcję f inną funkcją q należącą do pewnej klasy funkcji tak, aby jakość przybliżenia była najlepsza w sensie różnych miar odległości (aproksymacja);

- w przybliżony sposób obliczyć wartość całki oznaczonej (wzory kwadratur);
- znaleźć rozwiązania równania f(x) = 0 dla zadanej funkcji f;
- rozwiązać układ równań liniowych.

Do opisu zagadnienia można dodać samodzielnie napisaną aplikację, dotyczącą omawianego zagadnienia.

Literatura:

1. G. Dahlquist, A. Bjork, Metody numeryczne, PWN 1983
2. B.P. Demidowicz, I.A. Maron, Metody numeryczne, PWN 1965
3. J.M. Jankowscy, Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT 1988
4. J. Klamka i in., Metody numeryczne, skrypt 2068, Wyd. Politechniki Śl. 1998
5. Internet

11. Sposoby na sumę

Sumy, zarówno skończone jak i nieskończone, występują w matematyce bardzo często. Każdy z nas potrafi bez trudu obliczyć sumę skończonej liczby elementów ciągu arytmetycznego i geometrycznego. Niestety nie wszystkie sumy są tak proste do policzenia. Znane są jednak pewne sposoby, czy raczej sztuczki, które czasem działają. Mamy tu na myśli takie metody jak przeindeksowanie sumy, zmiana kolejności sumowania w sumach wielokrotnych, metoda zaburzania sumy. Oprócz wymienionych sposobów jest także bardzo interesujące narzędzie do sumowania zwane rachunkiem różnicowym. Rachunek różnicowy powstał przez analogię do rachunku różniczkowego - działu matematyki zajmującego się badaniem funkcji przy użyciu ich pochodnych i całek. Analogii pomiędzy rachunkiem różnicowym a różniczkowym jest wiele, na przykład sumowanie przez części. Celem pracy jest przedstawienie metod sumowania ze szczególnym uwzględnieniem rachunku różnicowego.

Literatura:

1. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik: Matematyka konkretna
2. http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/analiza/2011/03/02/Jak_obliczac_sumy_poteg/

12. Jak rozpoznać liczby pierwsze

Liczby pierwsze są ważne. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki mówi, że każda liczba naturalna większa od 1 jest iloczynem liczb pierwszych i to tylko na jeden sposób. Ale w jaki sposób odróżnić liczbę pierwszą od pozostałych? Ile jest liczb pierwszych? Tematem pracy mogą być algorytmy sprawdzające pierwszość liczb naturalnych (testy pierwszości), ale także różne sposoby opisu (wzory) liczb pierwszych.

Literatura:

P. Ribenboim, Mała księga wielkich liczb pierwszych, WNT, Warszawa 1997.

13 . Matematyka w cukierni

Donut - rodzaj wysmażanego na głębokim oleju wyrobu cukierniczego w kształcie zbliżonym do torusa. Często z polewą, np. czekoladową lub lukrową. Popularny w wielu krajach jako słodka przekąska lub deser. Opisz matematycznie ten smakołyk.

Literatura:
Franciszek Leja, Geometria analityczna, Warszawa, PWN 1977.

14. Przekształcenia geometryczne

Definicja przekształcenia zbioru punktów. Przekształcenia płaszczyzny: przesunięcie, symetria względem osi x, obrót dokoła punktu, jednokładność. Powinowactwa i podo-bieństwa. Izometrie. Inwersja. Własności przekształceń oraz związki pomiędzy nimi.

Literatura:
Franciszek Leja, Geometria analityczna, Warszawa, PWN 1977.

15. AbstrAkcjA

Abstrakcja jest pojęciem związanym z wieloma dziedzinami. Najczęściej łączymy je ze sztuką lub filozofią, ale pojęcie to występuje też w programowaniu i matematyce. W tej ostatniej jest ściśle połączone z pojęciem relacji równoważności, czyli takiej, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Relacja o podanych własnościach dokonuje podziału zbioru w którym jest określona, na klasy abstrakcji (równoważności). W pracy należy podać zastosowania relacji równoważności, ponadto można rozwiązać klika zadań z [1] lub [2].

Literatura:

1. H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, Warszawa, PWN, 1990.
2. W. Marek, J. Onyszkiewicz, Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach, Warszawa, PWN, 2000.