XXXIX Regionalny Konkurs
Rozkosze łamania Głowy
klasy I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Równanie $2^n \cdot (4-n) = 2n+4$:

A. ma tyle samo rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych, co w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych,

B. ma w zbiorze liczb całkowitych tylko rozwiązania dodatnie,

C. ma co najmniej trzy rozwiązania.

2. Wśród równości $\frac{43^3+15^3}{43^3+28^3} = \frac{43+15}{43+28}$, $\frac{143^3+45^3}{143^3+98^3} = \frac{143+45}{143+98}$, $\frac{2017^3-1009^3}{2017^3-1008^3} = \frac{2017-1009}{2017-1008}$:

A. co najwyżej jedna jest prawdziwa,

B. co najmniej dwie są prawdziwe,

C. wszystkie trzy są prawdziwe.

3. Dane jest równanie $\sqrt{x^2+m} = x+m$ z niewiadomą x. Zatem:

A. dla każdej dodatniej wartości parametru m równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie,

B. dla każdej ujemnej wartości parametru m równanie nie ma rozwiązań,

C. dla pewnej wartości parametru m równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

4. W trójkącie ABC z wierzchołka A poprowadzono środkową, której długość jest dwa razy mniejsza od długości jednego z boków tego trójkąta. Zatem trójkąt ABC:

A. mógł być równoramienny

B. mógł być prostokątny

C. mógł być ostrokątny

5. Dla dowolnych a, b, c będących długościami boków trójkąta istnieje trójkąt o bokach:

A. $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$,

B. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$,

C. a^2, b^2, c^2.

6. Funkcja liniowa f spełnia warunek $f(2016) + f(1) = 59$. Suma

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2017)$$

jest:

A. liczbą naturalną o co najmniej czterech dzielnikach naturalnych,

B. liczbą naturalną o dokładnie trzech dzielnikach naturalnych,

C. liczbą większą niż 60000.

7. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczono trzy niewspółliniowe punkty $A, B, C.$. Jeżeli A_1, B_1, C_1 są obrazami punktów A, B, C w:

A. symetrii względem osi Ox to figura $\triangle ABC \cup \triangle A_1B_1C_1$ może być trapezem równoramiennym,

B. symetrii względem prostej $y = 2x$, to pole figury $\triangle ABC \cup \triangle A_1B_1C_1$ może być dwa razy większe od pola trójkąta ABC,

C. symetrii względem początku układu współrzędnych to figura $\triangle ABC \cup \triangle A_1B_1C_1$ może być równoległobokiem.

8. Niech $S = \frac{2017}{1\cdot 2} + \frac{2017}{2\cdot 3} + \frac{2017}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{2017}{2016\cdot 2017}$. Wówczas:

A. S jest liczbą całkowitą większą niż 2015,

B. S jest liczbą większą niż 2016,

C. S jest liczbą wymierną, ale nie jest liczbą całkowitą.

9. Dane są liczby pierwsze p, q, gdzie $p \geqslant q > 3$. Wówczas:

A. $p^2 + q^2$ możne mieć dokładnie 4 dzielniki,

B. różnica $p^2 - q^2$ jest podzielna przez 12,

C. $p^2 - pq + q^2$ możne być liczbą złożoną.

10. W pewnych wyścigach żużlowych było tylu zawodników ile wszystkich biegów (w każdym biegu startowało czterech zawodników), przy czym każdy z zawodników zmierzył się z każdym z pozostałych zawodników tylko w jednym biegu. Wtedy:

A. każdy z zawodników startował w parzystej liczbie biegów,

B. liczba wszystkich biegów musiała być podzielna przez 4,

C. gdyby podwoić liczbę zawodników, to przynajmniej dwóch zawodników musiałoby się spotkać w przynajmniej dwóch biegach.

11. W pewnym klubie liczącym 42 członków, 24 lubi rozwiązywać krzyżówki, 24 lubi rozwiązywać sudoku, 24 lubi rozwiązywać kakuro. Wszystkich uczestników klubu można podzielić na siedem rozłącznych grup, a każda z nich ma inną liczbę członków. Pierwsze trzy grupy – to Ci, którzy lubią dokładnie jedną z tych rozrywek, następne trzy to Ci, którzy lubią dokładnie dwie z nich, zaś siódmą grupę tworzą uczestnicy lubiący wszystkie trzy. Najliczniejszą grupę stanowią uczestnicy lubiący dwie z nich – krzyżówki i kakuro. Najmniej liczna grupa ma tylko 3 członków. Zatem:

A. uczestników lubiących jedynie sudoku mogło być 8,

B. dokładnie 3 uczestników musi mieć grupa uczestników lubiących wszystkie trzy z tych rozrywek,

C. uczestników lubiących krzyżówki, ale nie lubiących kakuro mogło być 12.

12. Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano takie punkty K i L, że $KB = 5 \cdot AK$ oraz $CL = 5 \cdot BL$. Punkt P jest punktem przecięcia prostych AL i CK. Wówczas:

A. pole trójkąta ACP jest równe polu czworokąta $KBLP$,

B. pole trójkąta BKP jest pięć razy większe od pola trójkąta ABP,

C. pole trójkąta BPC stanowi mniej niż $\frac{5}{6}$ pola trójkąta ABC .

13. W trapezie prostokątnym o obwodzie 16, długość każdego z boków jest liczbą naturalną. Najkrótszy z boków:

A. może być wysokością tego trapezu,

B. może mieć długość 3,

C. musi mieć długość 2.

14. Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest trzecią potęgą liczby całkowitej n. Wówczas:

A. liczba n jest podzielna przez 3,

B. liczba n jest nieujemna,

C. każdy z trzech czynników może być liczbą mniejszą niż 1.

15. Prawdą jest, że:

A. $2^{10} + 5^{12}$ jest liczbą złożoną,

B. pewna potęga dwójki o wykładniku naturalnym może się kończyć dwoma takimi samymi cyframi,

C. pewna potęga dwójki o wykładniku naturalnym może się kończyć trzema takimi samymi cyframi.

16. Funkcja f dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x spełnia warunek $f(x) = x^2 \cdot (f(x-1) - 1)$. Ponadto $f(1) = 10$. Zatem:

A. $f(2)$ jest kwadratem liczby naturalnej,

B. f jest funkcją liniową,

C. nie istnieje funkcja spełniająca podane warunki dla każdej liczby rzeczywistej x.

17. Niech $\min(x, y)$ oznacza nie większą z liczb x i y.
Równanie $\min(2 + x, 1 - x) = ax$:

A. ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dokładnie jednej wartości parametru a,

B. może mieć nieskończenie wiele rozwiązań dla pewnej wartości parametru a,

C. może nie mieć rozwiązań.

18. Niech $s(n)$ oznacza sumę cyfr występujących w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej n. Jeśli $s(n) \geqslant 10$ możemy obliczyć $s(s(n))$. Jeśli $s(s(n)) \geqslant 10$ liczymy $s(s(s(n)))$ i tak dalej, aż dojdziemy do liczby jednocyfrowej a_n. Na przykład dla $n = 96$ liczba $a_{96} = 6$, bo $s(96) = 15$, a $s(15) = 6$, czyli $a_{96} = s(s(96)) = s(15) = 6$.

A. Wśród $a_{333}, a_{334}, a_{335}, \ldots, a_{2017}$ liczby 1 i 9 występują tyle samo razy.

B. Równość $a_n = a_{2017}$ jest spełniona dla dokładnie 224 liczb n.

C. Równość $a_{2017-k} = a_k$ jest spełniona dla dokładnie 224 liczb k.

19. Wypisujemy kolejne liczby nieparzyste tak, że w każdym następnym wierszu piszemy o jedną liczbę więcej niż w poprzednim. W pierwszym wierszu piszemy liczbę 1, w drugim 3 i 5, w trzecim 7, 9, 11 itd. Wówczas:

A. pierwszą liczbą w 11-tym rzędzie jest 111,

B. liczba 2017 jest napisana w 44-tym wierszu,

C. suma liczb 44-go wiersza jest taka sama jak iloczyn sumy liczb wiersza 4-go i sumy liczb wiersza 11-go.

20. Równanie $(xy - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$ ma w zbiorze liczb całkowitych:

A. co najmniej pięć rozwiązań,

B. co najmniej trzy takie rozwiązania, że $x \cdot y < 0$,

C. co najwyżej trzy takie rozwiązania, że $x \cdot y < 0$.