XXXIII Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Liczby a^{2011} oraz a^2 są liczbami wymiernymi.Zatem:

   a) a^{33} jest liczbą wymierną,

   b) istnieje taka liczba naturalna $3 < k < 2009$, że a^k jest liczbą niewymierną,

   c) liczby a^{2009} oraz a^{2013} są wymierne.

2. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Wtedy:

   a) istnieje taka niecałkowita liczba a, że $\frac{1}{2}[a] = [\frac{a}{2}]$,

   b) jeśli a jest liczbą całkowitą to $2[\frac{a}{2}] = [a]$

   c) dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $[x+1] = [x-1]+2$.

3. Pewna liczba naturalna n ma nieparzystą ilość dzielników. Zatem liczba n:

   a) musi być kwardatem pewnej liczby naturalnej k,

   b) może być sześcianem pewnej liczby naturalnej k,

   c) musi być iloczynem różnych liczb pierwszych.

4. Suma dwóch liczb czterocyfrowych, z których jedna powstała z drugiej przez napisanie cyfr w odwrotnym porządku może być:

   a) liczbą złożoną,

   b) liczbą pierwszą,

   c) liczbą podzielną przez 77.

5. Jeżeli przekątna trapezu równoramiennego zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego, a stosunek dłuższej podstawy do krótszej wynosi 2, to:

   a) ramię jest równe krótszej podstawie,

   b) przekątna jest prostopadła do ramienia,

   c) wysokość trapezu jest $\sqrt{3}$ razy dłuższa od krótszej podstawy.

6. Układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

   a) ma co najwyżej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych,
   b) ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb wymiernych,
   c) nie ma rozwiązań.

7. Liczby $\frac{1}{n}$ oraz $\frac{1}{n+1}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ mają skończone rozwinięcia dziesiętne. Wówczas:

   a) liczba n jest pewną potęgą liczby 2,
   b) liczba $n+1$ musi być podzielna przez 5,
   c) zbiór wszystkich n spełniających ten warunek jest dwuelementowy.

8. Na okręgu zaznaczono równe łuki AB, BC i CD. Cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym $|AP| < |BP|$ oraz $|DP| < |CP|$. Kąt $\sphericalangle APD$ ma miarę $40°$. Zatem:

   a) kąt CAB może mieć miarę $50°$.
   b) trójkąty BCD oraz ABC są trójkątami równoramiennymi
   c) kąt CAB może mieć miarę mniejszą niż $20°$.

9. Układ równań:

$$\begin{cases} x + |y| = 2 \\ |x-1| + y = 1 \end{cases}$$

   a) ma dokladnie dwa rozwiązania (x, y) w zbiorze liczb całkowitych,
   b) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych ujemnych,
   c) ma nieskończenie wiele takich rozwiązań (x, y), że x i y są liczbami różnych znaków.

10. Pięciokąt wypukły może mieć:

   a) jeden lub trzy kąty ostre,
   b) dwa lub cztery kąty ostre,
   c) tylko jeden kąt ostry.

11. Liczbę 7 podniesiono do potęgi siódmej, otrzymaną liczbę podniesiono znów do potęgi siódmej. Operację tę wykonano dokładnie 2011 razy. Cyfrą jedności otrzymanej ostatecznie liczby jest:

    a) 7 lub 9

    b) 3 lub 9

    c) 3 lub 7.

12. W trójkącie ABC z wierzchołka A poprowadzono środkową, której długość jest dwa razy mniejsza od długości boku, do którego została poprowadzona. Zatem trójkąt ABC:

    a) mógł być równoramienny,

    b) mógł być prostokątny,

    c) mógł być równoboczny.

13. Rozważmy wszystkie trójkąty, których długości boków są liczbami całkowitymi i których obwód wynosi 15. Liczba wszystkich takich trójkątów:

    a) jest liczbą pierwszą większą niż 8,

    b) jest liczbą pierwszą mniejszą niż 8,

    c) jest liczbą złożoną.

14. Dziś (4.03.2011) są urodziny Michała. Skończył on właśnie 20 lat. Michał urodził się:

    a) w poniedziałek lub środę,

    b) we wtorek lub w piątek,

    c) w sobotę lub w niedzielę.

15. W kwadracie $ABCD$ punkt E leży na boku AB, punkt F leży na boku CD oraz $|AE| : |EB| = |CF| : |FD| = 2 : 1$. Prosta AF przecina się z prostą DE w punkcie H, zaś prosta CE przecina się z prostą BF w punkcie G. Wówczas stosunek pola równoległoboku $EGFH$ do pola kwadratu $ABCD$ jest:

    a) mniejszy niż $2 : 7$,

    b) większy niż $1 : 5$ ale mniejszy niż $1 : 4$,

    c) równy $1 : 4$.

16. Wiadomo, że równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi, ma dwa różne pierwiastki i jeden z nich jest liczbą wymierną. Wówczas:

    a) drugi pierwiastek też jest liczbą wymierną,

    b) przynajmniej jeden z pierwiastków jest liczbą całkowitą,

    c) choć jeden ze współczynników a, b, c jest liczbą parzystą.

17. Dwa wielomiany W i Q mają identyczne pierwiastki $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Wówczas:

    a) stopnie wielomianów W i Q są równe,

    b) wielomian W może mieć stopień o jeden wyższy niż wielomian Q,

    c) wielomian W może mieć stopień dwukrotnie większy niż wielomian Q.

18. Niech $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach rzeczywistych i niech $f(x) = \sqrt{W(x)}$.

    a) dla $n = 7$ dziedziną funkcji f może być zbiór liczb rzeczywistych,

    b) dla pewnego n dziedziną może być zbiór pusty,

    c) jedynie dla $n = 1$ dziedziną funkcji może być przedział $< c, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

19. Równania $x^2 + px + q = 0$ oraz $x^2 + qx + p = 0$ mają dokładnie jeden wspólny pierwiastek. Zatem:

    a) $p = 1$ lub $q = 1$,

    b) $(p + q)^2 = 1$,

    c) $p + q - 1 = 0$.

20. Pole trójkąta, którego współrzędne wszystkich wierzchołków są liczbami całkowitymi jest liczbą całkowitą, jeśli:

    a) współrzędne wszystkich wierzchołków są liczbami nieparzystymi,

    b) obie współrzędne co najmniej jednego wierzchołka są liczbami parzystymi,

    c) współrzędne każdego wierzchołka są parą liczb, z których jedna jest parzysta, a druga nieparzysta.