XXIV Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas II szkół średnich

$\boxed{\text{zestaw } \mathbf{A}}$

1. W zbiorze liczb wymiernych określamy działanie: $a \bullet b = a + b - ab.$

   a) Działanie to jest przemienne.

   b) Diałanie to jest łączne i przemienne.

   c) Działanie jest przemienne i ma element neutralny.

   d) Działanie jest łączne i ma element neutralny.

2. Dana jest funkcja: $f(x) = \Big|\big||x-2|-2\big|-2\Big|.$

   a) Funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.

   b) Wykres funkcji f ma z prostą $y = 1$ dokładnie cztery punkty wspólne.

   c) Równanie $f(x) = m$ może mieć dla odpowiednio dobranych wartości m, $2, 3, 4, 5$ lub 6 rozwiązań.

   d) Funkcja f jest parzysta.

3. Cztery różne proste i okrąg:

   a) mogą podzielić płaszczyznę na 10 części,

   b) mogą podzielić płaszczyznę na dokładnie 9 części,

   c) mogą utworzyć figurę środkowosymetryczną,

   d) mogą przecinać się w 9 różnych punktach.

4. Niech $f(x) = \dfrac{x+a}{x+b}, \quad (x \neq -b).$

   a) Dla dowolnych wartości parametrów a i b wykresem funkcji f jest hiperbola.

   b) $\bigvee\limits_{a,b\in\mathbf{R}} \bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}\setminus\{-b\}} \quad f(f(x)) = x.$

   c) Można tak dobrać wartości a i b, aby wykres funkcji f nie miał punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych.

   d) Przy pewnych wartościach a i b funkcja f jest funkcją silnie malejącą dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{-b\}$.

5. Wskaż zdania prawdziwe:

   a) Każde dwa równoległe i nie leżące na jednej prostej odcinki są jednokładne.
   b) Każde dwa okręgi są jednokładne.
   c) Każde dwa kwadraty są jednokładne.
   d) Na prostej można tak wybrać cztery różne punkty A, B, C, D, by odcinki AB i CD nie były jednokładne.

6. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dany jest wzorem: $\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}\Big(a_n + \frac{6}{a_n}\Big). \end{cases}$

   a) Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest ograniczony z góry.
   b) Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest ograniczony z dołu.
   c) Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest monotoniczny.
   d) Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ma granicę i jest nią liczba z przedziału $(\frac{8}{5}, \frac{11}{6})$.

7. Niech $W(x) = (x^2-1)^{100}(x-a)$.

   a) Suma współczynników wielomianu W jest równa 0, dla każdej wartości parametru a.
   b) Wielomian W jest podzielny przez wielomian $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
   c) Dla pewnego a wielomian W przyjmuje tylko wartości ujemne.
   d) Dla pewnego $a > 0$ wielomian ma 101–krotny pierwiastek całkowity.

8. Wielokąt wypukły może mieć:

   a) więcej niż trzy kąty ostre,
   b) tyle samo przekątnych co boków,
   c) dwa razy więcej przekątnych niż boków,
   d) tyle samo przekątnych co osi symetrii.

9. Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest symetryczny względem osi OY.Zatem:
   a) $b = c = 4$.
   b) $b = 0$ i $c = 0$,
   c) $b = 0$ lub $b = c$,
   d) $b \cdot c = 0$,
10. Wśród wielościanów wypukłych istnieje wielościan
   a) o jednej przekątnej,
   b) o dwóch przekątnych,
   c) o trzech osiach symetrii,
   d) o dziewięciu osiach symetrii.
11. Wielomian W spełnia warunek:
$$\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} \quad (x-1)W(x+1) - (x+3)W(x-1) = 0.$$
   a) W może być wielomianem stopnia trzeciego.
   b) 0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.
   c) W jest podzielny przez $(x+2)$.
   d) W może być wielomianem stałym.
12. Zbiór wszystkich środków okręgów (leżących na jednej płaszczyźnie) przechodzących przez:
   a) dany punkt P jest zawsze całą płaszczyzną.
   b) dwa różne punkty P, Q jest zawsze symetralną odcinka PQ.
   c) trzy różne punkty P, Q, R jest zawsze punktem.
   d) cztery różne punkty P, Q, R, S jest zawsze zbiorem pustym.

13. Niech A, B, C będą trzema niewspółliniowymi punktami płaszczyzny.

   a) Trójkąt ABC można podzielić na cztery trójkąty przystające wtedy i tylko wtedy, gdy jest on trójkątem równobocznym.

   b) Trójkąt ABC można podzielić na trójkąty ostrokątne wtedy i tyklo wtedy, gdy jest on trójkątem ostrokątnym.

   c) Trójkąt ABC można podzielić na 16 trójkątów przystających.

   d) Trójkąt ABC można podzielić na sześć trójkątów prostokątnych.

14. Na okręgu o średnicy d opisano trapez równoramienny o podstawach a, b.

   a) Jeśli $d = \dfrac{a+b}{2}$, to trapez ten jest prostokątem.

   b) Jeśli $d = \sqrt{ab}$, to trapez ten jest prostokątem.

   c) $d = \dfrac{a+b}{2}$, dla dowolnego trapezu równoramiennego opisanego na okręgu.

   d) $d = \sqrt{ab}$, dla dowolnego trapezu równoramiennego opisanego na okręgu.

15. Wskaż zdania fałszywe:

   a) Z dowolnych pięciu liczb całkowitych można wybrać takie trzy, których suma jest podzielna przez 3.

   b) Dla każdej liczby pierwszej p istnieje liczba naturalna mająca $(p+1)^p$ różnych dzielników.

   c) Istnieją takie liczby pierwsze, których średnia arytmetyczna jest też liczbą pierwszą.

   d) Jeśli suma pewnych siedemnastu różnych liczb pierwszych jest parzysta, to ich iloczyn też.