PROPOZYCJE TEMATÓW NA XXXV OSM

1. Paradoksy rachunku prawdopodobieństwa w codzienności

Przy rozważaniu prawdopodobieństwa warunkowego łatwo popełnić błąd. Zauważmy, że prawdopodobieństwo, że DNA niewinnej osoby pasuje do zbadanego materiału z miejsca zbrodni jest inne niż prawdopodobieństwo niewinności osoby, której DNA pasuje do tego samego materiału. Tego typu pomyłki niestety zdarzały się w historii. Gdy mamy do czynienia z rachunkiem prawdopodobieństwa, nierzadko intuicja może nas sprowadzić na manowce. Jako cel pracy postaw sobie przedstawienie paradoksu (jednego lub kilku) opartego na rachunku prawdopodobieństwa (często mówi się też o takich paradoksach w kontekście teorii gier) i zrozumienie problemu w taki sposób, aby stało się dla Ciebie jasne, że paradoks jest tylko iluzją.

Literatura:

- Ian Stewart " Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne", Prószyński i S-ka, Warszawa 2011 (s.141-153).
- Philip D. Straffin "Teoria gier", Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa 2006.
- http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/rachunek_prawdopodobienstwa/2011/03/25/Paradoksy_rachunku_prawdopodobienstwa/
- Joseph Bertrand, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris 1888.

2. Średnie i zależności między nimi

Każdy może z łatwością obliczyć średnią swoich ocen. Jest to zwykle średnia arytmetyczna. Ale istnieją również inne średnie, jak geometryczna, harmoniczna, ważona itd. Praca na ten temat może zawierać własności różnych średnich, nierówności między nimi oraz przykłady zastosowania np. do rozwiązywania zadań. Autorzy są zachęcani do samodzielnego dowodzenia i interpretacji ciekawych własności średnich, szczególnie tych niespotykanych na co dzień.

Literatura:

- D. S. Mitrinovic, Elementarne nierówności, PWN, Warszawa 1972.

3. Równania – proste i trudne

Rozwiązywanie równań to bardzo częste szkolne zadanie. Jedna z metod rozwiązywania równań nieliniowych jest znana pod nazwą metody bisekcji. Opiera się ona na twierdzeniu Bolzana-Cauchy’ego. W pracy proszę opisać tę lub inną metodę rozwiązywania równań nieliniowych.

Literatura:

- D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, WNT, Warszawa 2006.
- Z. Kosma. - Metody i algorytmy numeryczne, Politechnika Radomska, Radom 2009.
- J. Klamka, Z. Ogonowski, Metody Numeryczne.Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2013.
- M. Kosiorowska, T. Stanisz, Metody Numeryczne. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków 2004.

4. Model regresji liniowej

Bardzo często w analizie statystycznej pojawia się przypuszczenie istnienia zależności liniowej między dwiema cechami (przykładowo może nas interesować zależność między wydajnością pracy a stażem pracy). W tym celu musielibyśmy w sposób niezależny wybrać pewną liczbą pracowników danego przedsiębiorstwa i zdobyć odpowiednie dane. Po stworzeniu dla nich wykresu rozrzutu (rozproszenia) można znaleźć funkcję liniową, która „najlepiej” opisuje uzyskaną zależność. Wykorzystuje się tutaj metodę najmniejszych kwadratów. Po oszacowaniu parametrów tej liniowej funkcji regresji można ocenić dokładność dopasowania funkcji regresji do danych empirycznych. Analizę można poszerzyć o zbadanie istotności parametrów strukturalnych. Oprócz opisu matematycznego (z wykorzystaniem metod statystyki matematycznej) pracę warto uzupełnić przykładem takiej analizy na podstawie konkretnych danych z wybranej przez siebie dziedziny (finanse, medycyna, sport itp.).

Literatura:

- M. Sobczyk „Statystyka”, PWN, Warszawa 2007.
- M. Piłatowska „Repetytorium ze statystyki”, PWN, Warszawa 2007.

5. Kwadraty magiczne

Kwadratem magicznym nazywamy ciąg liczb naturalnych od 1 do n^2 ustawionych w macierz n na n w taki sposób, że suma liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie i na dwóch głównych przekątnych jest taka sama. Celem pracy jest podanie przykładów kilku kwadratów magicznych i zbadanie ich wybranych właściwości. Czy potrafisz napisać algorytm generujący kwadraty magiczne? Czy potrafisz udowodnić, że suma liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie i na dwóch głównych przekątnych jest zawsze równa $n(n^2+1)/2$? Czy uda Ci się odkryć jakieś inne ukryte właściwości magicznych kwadratów? Zastanów się, czy potrafisz wskazać jakieś różnice pomiędzy znanymi kwadratami magicznymi Lo Shu, Durera, Bena Franklina, czy wspomnianego już przez Pliniusza Starszego kwadratu Sator-Rotas. Czy można budować kwadraty magiczne w trzech wymiarach? A magiczne koła, albo magiczne gwiazdy? Wreszcie, czy potrafisz ustosunkować się do pytania „Czy w Sudoku rzeczywiście nie ma żadnej matematyki?”?

Literatura:

- Pickover, C. A., 2002. The Zen of Magic Squares, Circles and Stars: An Exhibition of Surprising Structures Across Dimensions. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Alejandre, S., 2006. "Magic Squares," The Math Forum, University of Drexel School of Education.
- http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html

- Hayes, B., 2006. "Unwed Numbers: The mathematics of Sudoku, a puzzle that boasts "No math required!" American Scientist Online: Vol 94, number 1, page 12.
- http://www.americanscientist.org/template/AssetDetail/assetid/48550?&print=yes

6. Origami

W jaki sposób stworzyć z 2-wymiarowej kartki papieru 3-wymiarowe dzieło sztuki? Origami, czyli tradycyjna japońska sztuka składania papieru, jest pełna matematycznych motywów i pomysłów. Jakie są popularne techniki składania papieru w origami i w jaki sposób tworzą trójwymiarowe struktury przestrzenne? Czy potrafisz sklasyfikować różne typy origami na podstawie rodzajów użytych do ich budowy składań? Czy potrafisz udowodnić twierdzenie Kawasaki podające warunek konieczny i dostateczny na to, aby dany wzór dało się złożyć z kartki papieru? Co to są aksjomaty Huzity matematycznej teorii origami? Wreszcie — czy origami to tylko zabawa? Czy wiesz, że matematyczna teoria origami potrafi np. opisać proces tworzenia struktury DNA z pojedynczej nitki RNA?

Literatura:

- Andersen, E. M., 2004. "Origami and Math," Paperfolding.com http://www.paperfolding.com/math/
  Wikipedia contributors, 2006. "Huzita-Hatori axioms," Wikipedia, The Free Encyclopedia.
- http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Huzita-Hatori_axioms&oldid=56396768
  Neith, K., 2014. „Programmed to fold: RNA Origami," Caltech News. http://www.caltech.edu/news/programmed-fold-rna-origami-43511

7. Nieskończoność nieskończoności nierówna

Na temat nieskończoności łamano sobie głowy już od czasów starożytnych. Bardzo szybko zorientowano się, że pojęcie to rowadzi do wielu paradoksów (np.: paradoks Zenona z Elei, paradoks Hilberta, paradoks Galileusza). Zauważano także takie absurdy, jak fakt, że liczb naturalnych i liczb parzystych jest tyle samo, co przeczy intuicji, która podpowiada nam, że część musi być mniejsza od całości. Jednakże okazuje się, że wszystkich liczb rzeczywistych jest zdecydowanie więcej niż liczb wymiernych, ale tyle samo, co liczb rzeczywistych na odcinku [0,1].

Zachęcamy zatem uczestników do zgłębienia pojęcia nieskończoności. Oczekujemy od autora pracy zbadania nieskończoności na podstawie zbiorów liczb naturalnych, całkowitych wymiernych i rzeczywistych, a także omówienia kilku ciekawych paradoksów związanych z nieskończonością.

Literatura:

- Księga liczb, John Conway, Richard Guy.
- Co to jest matematyka?, Richard Courant, Herbert Robbins.

8. Algorytmy kombinatoryczne

Agorytmy kombinatoryczne, to metody generowania wszystkich obiektów kombinato- rycznych spełniających pewne warunki. Można je stosować jako proste, chociaż zwykle nie najszybsze sposoby rozwiązania pewnych klasycznych problemów. Np. generowanie i sprawdzanie wszystkich permutacji można zastosować do rozwiązania problemu komiwojażera, lub generowanie wszystkich podzbiorów danego zbioru jako metoda rozwiązania problemu plecakowego. Podziały zbioru mogą być pomocne, gdy zadanie polega na stworzeniu planu przetransportowania n paczek o różnych wagach m samochodami o różnych ładownościach.

Prace konkursowe poświęcone tym zagadnieniom mogą zawierać omówienie jednego lub kilku podobnych problemów. Szczególnie mile widziane będą oryginalne problemy oraz samodzielne rozwiązania problemów zamieszczonych w literaturze lub problemów pochodzących z obserwacji otaczającego świata.

Literatura:

- R.L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, Matematyka konkretna. WNT, Warszawa 1996.
- W. Lipski, Kombinatoryka dla programistów. WNT, Warszawa 1989.
- Z. Palka, A. Ruciński, Wykłady z kombinatoryki. WNT 1998.
- Źródła internetowe.

9. Rozmieszczanie przedmiotów w pudełkach

Na ile sposobów można rozmieścić przedmioty w pudełkach jeśli możliwe są różne sytuacje: przedmioty są rozróżnialne lub nie oraz pudełka są rozróżnialne lub nie. Dodatkowo możemy przyjąć różne założenia dotyczące zawartości pudełek - mogą zawierać dowolną liczbę przedmiotów lub co najwyżej jeden przedmiot. Przedstaw rozwiązania przedstawionych sytuacji wraz z opisem obiektów kombinatorycznych otrzymanych w wyniku rozwiązań.

Literatura:

- Zbigniew Palka, Andrzej Ruciński, Wykłady z kombinatoryki, WNT, 2004.
- Victor Bryant, Aspekty kombinatoryki, WNT, 2007.

10. Metody numeryczne

Co to są metody numeryczne? Można krótko powiedzieć, że ten dział matematyki zajmuje się przybliżonym rozwiązywaniem zadań matematycznych. Zakres tych zagadnień jest bardzo rozległy. Nie sposób opisać wszystkie te zagadnienia. Uczestnik Sejmiku może skupić się na jednym spośród wymienionych:

- Jak obliczać wartość wielomianu i jego pochodnych w zadanym punkcie?
- Znaleźć wielomian, który w zadanych punktach przyjmuje podane wartości, a może i pochodne w tych punktach są zadane (interpolacja).
- Przybliżyć funkcję *f* inną funkcją *g* należącą do pewnej klasy funkcji tak, aby jakość przybliżenia była najlepsza w sensie różnych miar odległości (aproksymacja).
- W przybliżony sposób obliczyć wartość całki oznaczonej (wzory kwadratur).
- Znaleźć rozwiązania równania $f(x) = 0$ dla zadanej funkcji f.
- Rozwiązać układ równań liniowych.

Do opisu zagadnienia można dodać samodzielnie napisaną aplikację, dotyczącą omawianego zagadnienia.

Literatura:

- G. Dahlquist, A. Bjork, Metody numeryczne, PWN, 1983.
- B.P. Demidowicz, I.A. Maron, Metody numeryczne, PWN, 1965.
- J.M. Jankowscy, Przegląd metod i algorytmów numerycznych, WNT, 1988.
- J. Klamka i in., Metody numeryczne, skrypt 2068, Wyd. Politechniki Śl., 1998.
- Internet.

11. Liczby i wielomiany Bernoulliego

Definicje, własności i zastosowania. Związek liczb Bernoulliego z funkcją dzeta Riemanna oraz z rozwinięciem w szereg Taylora niektórych funkcji (np. tg x, $x/(e^x\text{-}1)$), wzór Faulhabera.

Literatura:

- G.M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, t. II, PWN, Warszawa 1997.
- R.L. Graham,D.E.Knuth, O. Patashnik, Matematyka konkretna, PWN, Warszawa 1996.
- K. Knopp, Szeregi nieskończone, PWN, Warszawa 1956.

12. Interpretacja geometryczna i fizyczna równania różniczkowego zwyczajnego

W większości praktycznych sytuacji równanie rózniczkowe, z którym mamy do czynienia, jest albo bardzo proste i postać jego rozwiązania jest od dawna znana albo na tyle skomplikowane, że uzyskanie jawnego rozwiązania jest bardzo trudne, o ile w ogóle możliwe. Dlatego bardzo ważną umiejęnością jest odczytywanie własności równań różniczkowych i ich rozwiązań z odpowiednich wykresów.

Pojęcie równania rózniczkowego i jego rozwiązania, krzywa całkowa, pole kierunków, pole wektorowe, węzeł, siodło.

Literatura:

- Jerzy Ombach, Wykady z równań różniczkowych wspomagane komputreowo-Maple, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagielońskiego, Kraków 1999.
- Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2006.

13. Twierdzenie Halla i jego zastosowania

Załóżmy, że mamy pewną grupę kobiet i mężczyzn. Każdy mężczyzna zna pewną liczbę kobiet z tej grupy. Czy ci mężczyźni mogą wybrać sobie żonę spośród tych kobiet, które znają?

A teraz zastanówmy się nad innym problemem. Załóżmy, że w pewnej organizacji działa pewna liczba komisji, przy czym jedna osoba może być członkiem wielu komisji. Czy z każdej komisji można wyłonić przewodniczącego tak, aby każda komisja miała innego przewodniczącego?

Odpowiedź na te pytania daje twierdzenie Halla. Przedstaw w pracy to twierdzenie wraz z jego dowodem oraz podaj inne zastosowania tego twierdzenia. Możesz także zastanowić się nad liczbą rozwiązań tych problemów.

Literatura:

- Victor Bryant, ,Aspekty kombinatoryki, WNT.
- Przemysław Kiciak, Kaskady i swaty, http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_mnogosci/2013/06/28/Kaskady_i_swaty/
- Tomasz Tkocz, Twierdzenie Halla o małżeństwach, https://www.mimuw.edu.pl/~tkocz/teaching/2lorybnik/malzenstwa.pdf
- Witold Lipski, Wiktor Marek, Analiza kombinatoryczna, PWN.

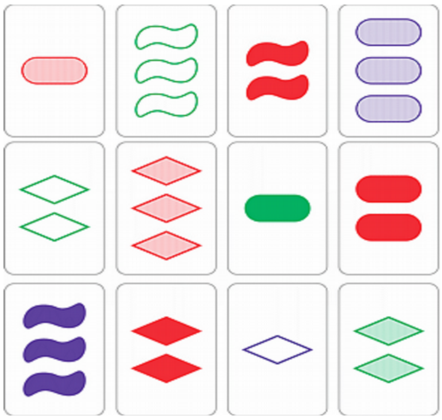
14. Set

W grę Set gra się za pomocą 81 kart. Każdej z kart odpowiada liczba (od 1 do 3), kolor (czerwony, zielony, fioletowy), kształt (owal, romb, fala) oraz wypełnienie (puste, paskowane lub jednolite). Set to trójka takich kart, że wszystkie mają taki sam kolor lub każda ma inny, wszystkie mają taki sam kształt lub każda ma inny, wszystkie mają takie samo wypełnienie lub każda ma inne, wszystkie mają taką samą liczbę lub każda ma inną. Wykłada się kolejne karty na stół, a jeżeli któryś z graczy znajdzie Seta, zbiera tworzące go karty ze stołu, a gra toczy się aż wszystkie karty zostaną wyłożone. Wygrywa ten, kto zbierze najwięcej setów. Jaka jest największa liczba kart, w której może nie występować żaden set? A gdyby cech było nie cztery, tylko sześć? Co wspólnego ma Set z wielomianami i prostymi w przestrzeni czterowymiarowej F_3^4? Ile kart mogę wyłożyć na stół bez formowania ani jednego Seta?

Temat można rozwinąć w dowolnie wybranym kierunku, zadając sobie inne pytania zależnie od kreatywności ucznia...

Inspiracją do tego tematu jest informacja ze strony https://om.edu.pl/?q=node/228,
oraz pliki:
https://om.edu.pl/sites/default/files/rozne/om67/Lista18.pdf
https://om.edu.pl/sites/default/files/rozne/om67/Lista18x.pdf
Literarura:

- http://www.setgame.com/sites/default/files/teacherscorner/THE%20JOY%20OF%20SET.pdf
- https://qz.com/697668/the-simple-math-that-helped-mathematicians-solve-a-vexing-problem-in-the-kids-card-game-set/



15. Gra Dobble – jak to jest zrobione?

Gra składa się z 55 kart, na każdej z nich znajduje się 8 symboli (z danych pięćdziesięciu). Dokładnie jeden jest wspólny pomiędzy dwiema dowolnym kartami. Celem graczy jest jak najszybciej znaleźć element łączący karty wśród tych, które są odkryte na stole. Kto pierwszy ten lepszy. Ot, taka sobie ciekawa gra. A gdzie w tym wszystkim jest matematyka?
Zacznijmy od początku: zaplanujmy grę składającą się z trzech kart. Jak umieścić na nich obrazki (zamiast nich możemy oczywiście używać liczb), żeby każde dwie karty miały dokładnie jeden element wspólny? Istnieje parę rozwiązań, nas interesuje to, w którym na każdej karcie jest możliwie najmniej obrazków oraz w całej grze użytych jest jak najmniej różnych obrazków (to nie jest jeszcze jednoznacznie zdefiniowany cel). Przykładowe rozwiązanie to: 12-23-31 (liczby na kartach rozdzielone są „-”).
A gdybyśmy chcieli mieć 4 karty w grze? Czy daje się znaleźć takie rozwiązanie, w którym na każdej karcie są dwa obrazki?
A w przypadku pięciu kart, czy 3 obrazki na karcie wystarczą? Ile wtedy będzie różnych obrazków użytych w grze? Jakie algorytmy mogą generować rozmieszczenie obrazków na kartach, który z nich jest najlepszy? Skąd wiadomo, że jest najlepszy? Odpowiedzi na to pytania są znane i związane m.in. z takim pojęciem jak *płaszczyzna rzutowa*.

Literatura:

- https://stackoverflow.com/questions/6240113/what-are-the-mathematical-computational-principles-behind-this-game
- http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html?lang=fr
- http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/gry_zagadki_paradoksy/2014/03/30/Naprawde_ciekawa_gra/

16. Kooperacja w grze wieloosobowej

Co to jest podział dolara? Jak podzielić łup piracki między poszczególnych piratów, czy gażę w orkiestrze? Czy podział wygranej między kilka osób może być sprawiedliwy? Komu opłaca się z kim zawierać koalicję w grze typu głosowanie większościowe? Czy można kogoś przymusić groźbą do wejścia w koalicję lub też zjednać sobie sojusznika obietnicą? Jak wybrać strategię optymalną, będąc w koalicji? Czym jest funkcja charakterystyczna gry?
Analiza gier dwuosobowych stanowi dość częsty temat wykładów i referatów wprowadzających w środowisko matematycznej teorii gier. Kooperacja w grach wieloosobowych jest tematem nie mniej ciekawym. Spróbuj znaleźć odpowiedzi na powyższe pytania, dokonaj własnej interpretacji otrzymanych rezultatów.
Literatura:

- Teoria gier, Ph.D.Straffin, SCHOLAR

17. Czy przedział otwarty zawsze jest otwarty?

Rozważmy zbiór liczb rzeczywistych i uznajmy za zbiory otwarte tylko te, które zawierają zero lub zbiór pusty. Wtedy przedział (-1;1) będzie otwarty, tak, jak i [-1;1], a przedział (0;1) już otwarty nie będzie. Za to, podobnie, jak [1,2] będzie zbiorem domkniętym. Dalej, przyglądając się przykładowo ciągowi (n 1 : n 2 N+) stwierdzimy, że nie ma on granicy w punkcie zero.
Co więcej, okaże się, że nie ma on żadnej innej granicy. Z kolei ciąg naprzemienny 0,1,0,1,0,1,0,1... okazuje się być zbieżny do 1 i jest to jedyna granica tego ciągu. Dokonaj własnego przeglądu różnych topologii na prostej rzeczywistej w kontekście otwartości wybranych zbiorów i/lub zbieżności ciągów lub innej wybranej samodzielnie własności.

Literatura:

- Topologia Ogólna, R.Engelking, PWN
- Wstęp do teorii mnogości i topologii, K. Kuratowski, BM
- Topologia, S. Wereński, Wyd. UTH
- Matematyka od podstaw, A.Błaszczyk, S.Turek, PWN
- Przestrzenie metryczne w zadaniach, J.M. Jędrzejewski, W. Wilczyński, Wyd. Uniw. Łódz.

18. Aksjomaty w matematyce

Współczesna rzeczywistość uwarunkowana jest szeregiem regulaminów. Nie sposób wyobrazić sobie bezpieczną autostradę, po której poruszanie się nie byłoby ściśle wyartykułowane. W matematyce o "bezpieczeństwo" dbają założenia o charakterze aksjomatycznym. Teoria mnogości i geometria opierają się o szereg aksjomatów, na bazie których buduje się teorię. To aksjomaty zapewniają istnienie w matematyce sumy zbiorów, zbioru wszystkich podzbiorów, czy zbioru pustego. Na trzech pojęciach pierwotnych: punkt, prosta, płaszczyzna oraz na dwóch relacjach: leżenia między oraz równej odległości, opiera się hilbertowska geometria absolutna. Spróbuj przedstawić wybrany system aksjomatów i pokaż jakie twierdzenia można w nim udowodnić, a jakie wymagają dodatkowych założeń.

Literatura:

- Podstawy geometrii, K. Borsuk, W. Szmielew, BM
- Geometria dla nauczycieli, M. Kordos, L. W. Szczerba, PWN

19. Modelowanie rzeczywistości

Globalny świat oferuje szybkie i proste rozwiązania w praktycznie każdej dziedzinie życia, na którą wpływ ma działalność człowieka i w których zastosowanie mają metody matematyczne. Próby tworzenia sztucznej inteligencji dowodzą, że nauka głęboko sięga w przestrzeń ludzkiej świadomości. Coraz bardziej znaczącą rolę odgrywa modelowanie matematyczne, którego zastosowania mogą zaskakiwać. Z użyciem narzędzi statystycznych zbuduj model liniowy dla opisanego przez siebie problemu (prognoza wydatków, masy urodzeniowej, oceny z egzaminu itp.). Kiedy dokładność modelu można uznać za zadowalającą?

Literatura:

- Ekonometria, M.Sobczyk, Wyd. CH Beck
- Ekonometria. Wybrane zagadnienia, B.Borkowski, H.Dudek, W. Szczęsny, PWN
- Ekonometria. Metody i ich zastosowanie, A.Welfe, Wyd. Ekon. Pol.